

Funciones polinómicas que conservan el área bajo la curva.

Polynomial functions that preserve the area under the curve.

Daniel Buitrago¹

¹ Fundación Universitaria Cafam

daniel.buitrago@unicafam.net.co

Buitrago, D. (2018) Funciones polinómicas que conservan el área bajo la curva. Gestión Ingenio y Sociedad, 3 (1). Recuperado en: <http://gis.unicafam.edu.co/index.php/gis/article/view/23/1>

RESUMEN

En el presente trabajo teórico se muestra la existencia y unicidad de una función polinómica de mayor longitud de arco que conserva el área bajo la curva de una función polinómica dada del mismo grado. En ese sentido se pretende sentar las bases de su estudio partiendo de la situación más elemental: figuras que se encuentran cerradas por una función polinómica y un intervalo en \mathbb{R}^2 . Esto con la idea de que la determinación de las curvas que encierran este tipo de figuras tenga una mayor utilidad práctica que el estudio meramente abstracto del mapeo entre sus áreas superficiales y sirva también como fuente de problemas de Matemáticas a nivel universitario.

Palabras clave: Función polinómica, área bajo la curva, longitud de arco.

ABSTRACT

In the present theoretical work, the existence and uniqueness of a polynomial function of greater arc length that preserves the area under the curve of a given polynomial function of the same degree is shown. In this sense, it is intended to lay the foundations of its study starting from the most elementary situation: figures that are closed by a polynomial function and an interval in \mathbb{R}^2 . This with the idea that the determination of the curves that enclose this type of figures has a greater practical utility than the merely abstract study of the mapping between its superficial areas and serves as a source of problems of Mathematics at the university level.

Keywords: Polynomial function, area under the curve, arc length.

INTRODUCCIÓN

Sobre figuras planas cerradas que conservan el área bajo un mapeo φ , autores como Surhone y otros hablan de un mapeo equiárea si, al ser M y N dos superficies de \mathbb{R}^3 , el área superficial de todo conjunto abierto U de M es igual al área superficial de $\varphi(U)$ en N . Sin embargo, no hay actualmente documentos dedicados al estudio de las curvas que encierran dichas áreas iguales y las relaciones entre ellas cuando se quiere que la segunda parta de la primera aumentando su longitud en cierta cantidad. El propósito del presente trabajo es sentar las bases de su estudio partiendo de la situación más elemental: figuras que se encuentran cerradas por

una función polinómica y un intervalo en \mathbb{R}^2 . Esto con la idea de que la determinación de las curvas que encierran este tipo de figuras tenga una mayor utilidad práctica que el estudio meramente abstracto del mapeo entre sus áreas superficiales y sirva también como fuente de problemas de Matemáticas a nivel universitario.

DESARROLLO

Problema inicial y definiciones básicas

Se parte de una figura poligonal cerrada cualquiera con un área dada. Si se aumenta la longitud de uno de sus lados y se quiere que la figura conserve la misma área, ¿cuál debe ser la longitud de los demás lados?

Si se traslada la situación al plano cartesiano donde se requiere que uno de los lados de la figura sea un subconjunto del eje x , (llámese $[c, d]$) y los restantes sean una función polinómica de x (llámese $f(x)$), se puede expresar el problema como hallar una función polinómica $g(x)$ tal que

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{c-k}^{d+k} g(x)dx$$

Donde la longitud del lado $[c, d]$ ha sido aumentada en $2k$. (Nótese que esto implica que c y d son soluciones de $f(x) = 0$ y a su vez $c - k$ y $d + k$ son soluciones de $g(x) = 0$).

Definición 1.1 Sea $L_A = \int_c^d \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$ y $L_B = \int_{c-k}^{d+k} \sqrt{1 + |g'(x)|^2} dx$ donde c y d son soluciones de $f(x) = 0$, y a su vez $c - k$ y $d + k$ lo son de $g(x) = 0$. Entonces a la variación $L_B - L_A = \Delta L$ se le denomina elongación longitudinal de la figura. Y a $E = 2k$ se le denomina elongación de la base.

El enfoque que se empleará es el de determinar por completo los objetos que conforman las dimensiones de la nueva figura formada. Esto es, la función $g(x)$ sobre el intervalo $[c - k, d + k]$.

1.El caso de la función cuadrática

Problema 3.1 Al considerar la situación en la que la figura está delimitada por un intervalo $[c, d]$ y una función cuadrática f , se tiene el siguiente planteamiento:

Sea $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ una función con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $a_2 \neq 0$ tal que $f(c) = f(d) = 0$. Se quieren encontrar números reales b_0, b_1, b_2 con $b_2 \neq 0$ tales que

$$\int_c^d a_2x^2 + a_1x + a_0 dx = \int_{c-k}^{d+k} b_2x^2 + b_1x + b_0 dx \quad (1)$$

Y que además:

$$b_2(d+k)^2 + b_1(d+k) + b_0 = b_2(c-k)^2 + b_1(c-k) + b_0 \quad (2)$$

Solución 2.1 Sea $A = \int_c^d a_2x^2 + a_1x + a_0 dx$. En virtud de la ecuación (1), A también se puede escribir como:

$$A = \int_{c-k}^{d+k} b_2x^2 + b_1x + b_0 dx$$

Calculando la integral se obtiene:

$$A = \frac{b_2((d+k)^3 - (c-k)^3)}{3} + \frac{b_1((d+k)^2 - (c-k)^2)}{2} + b_0((d+k) - (c-k))$$

Aplicando el hecho de que $(d+k)$ y $(c-k)$ son soluciones del polinomio $b_2x^2 + b_1x + b_0$, se llega a la ecuación

$$A = \frac{1}{6} [b_1((d+k)^2 - (c-k)^2) + 4b_0((d+k) - (c-k))] \quad (3)$$

Ahora, agregando las condiciones expresadas en (2) se tiene

$$b_2(d+k)^2 + b_1(d+k) + b_0 = 0$$

$$b_2(c-k)^2 + b_1(c-k) + b_0 = 0$$

Que, junto con (3) forman un sistema de ecuaciones de 3x3 cuyas soluciones son:

$$b_2 = -\frac{6A}{((d+k) - (c-k))^3} = -\frac{6A}{((d-c) + E)^3} \quad (4)$$

$$b_1 = \frac{6A((d+k) + (c-k))}{((d+k) - (c-k))^3} = \frac{6A(d+c)}{((d-c) + E)^3} \quad (5)$$

$$b_0 = -\frac{6A(d+k)(c-k)}{((d+k)-(c-k))^3} = -\frac{6A(d+k)(c-k)}{((d-c)+E)^3} \quad (6)$$

Ejemplo 2.1 Se tiene la figura delimitada en el eje x por [2, 4] y por la función $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. Su área bajo la curva es

$$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 8)dx = \frac{4}{3}$$

Si la longitud de su base aumenta en $E = 4$, ¿en cuánto aumentarán las demás dimensiones? Esto es, ¿de cuánto será la elongación longitudinal de la figura?

Solución 2.2 Se quieren encontrar números reales b_2, b_1 y b_0 con $b_2 \neq 0$ tales que

$$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 8)dx = \int_0^6 (b_2x^2 + b_1x + b_0)dx$$

Aplicando las ecuaciones (4), (5) y (6) para $A = \frac{4}{3}$, $d + k = 6$ y $c - k = 0$ se obtiene:

$$b_2 = -\frac{1}{27}$$

$$b_1 = \frac{2}{9}$$

$$b_0 = 0$$

De esta manera, si $g(x) = -\frac{1}{27}x^2 + \frac{2}{9}x$, entonces

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_0^6 g(x) dx = \frac{4}{3}$$

Para el cálculo de la elongación longitudinal se tiene que

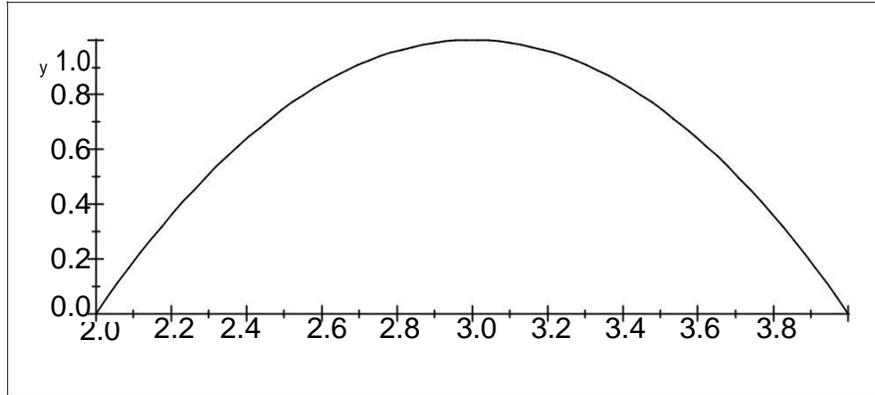
$$L_A = \int_2^4 \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx = \sqrt{5} - \frac{\ln(\sqrt{5} - 2)}{2} \approx 2.95788$$

Mientras que

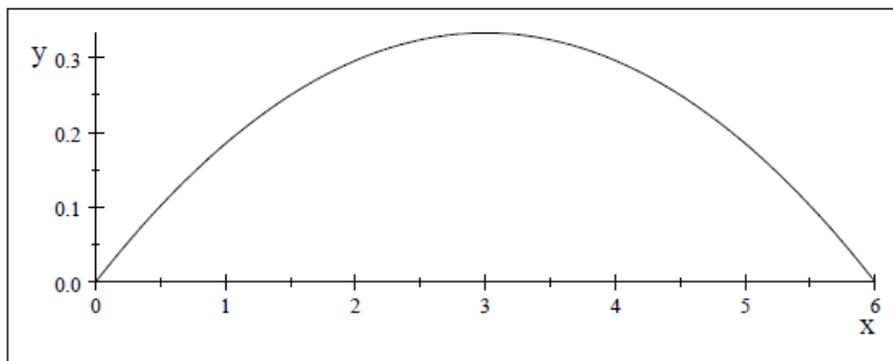
$$L_B = \int_0^6 \sqrt{1 + |g'(x)|^2} dx = \frac{\sqrt{85}}{3} - \frac{27 \ln\left(\frac{89 - 4\sqrt{85}}{81}\right)}{4} \approx 6.04902$$

Luego

$$\Delta L \approx 6.04902 - 2.95788 \approx 3.09113$$



ráfica 1: $f(x) = -x^2 + 6x - 8$



Gráfica 2: $g(x) = -\frac{1}{27}x^2 + \frac{2}{9}x$. Geométricamente, la figura dada por $g(x)$ es la misma dada por $f(x)$ estirada.

1. Generalización a una función polinómica de grado n

Extendiendo la situación a una figura que se encuentre delimitada por un intervalo cerrado $[c, d]$ del eje x y una función $f(x)$ polinómica de grado n , se supondrá que las n soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ sean reales y distintas (esto último no es en realidad necesario. Más aún, sólo se requiere que al menos c y d sean soluciones reales de $f(x) = 0$, pero es otro caso a abordar en otra ocasión). Bajo estas circunstancias, el intervalo $[c, d]$ puede expresarse como una partición

$$c = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = d$$

Donde las α_i son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Si se escribe $A_i = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx$, se tendrá que

$$A = \int_c^d f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i$$

Lo que nos proporciona el lenguaje para describir el problema principal.

Problema 3.1 Dada una función polinómica de grado n , $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ con n soluciones reales distintas en el intervalo $[c, d]$, dos de las cuales son c y d , se quieren encontrar números reales b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 con $b_n \neq 0$ tales que

$$\int_c^d a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 dx = \int_{c-k}^{d+k} b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 dx$$

De tal forma que existan β_i ($1 \leq i \leq n$) soluciones reales de $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 = 0$ tales que

$$c - k = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n = d + k$$

Que cumplan con

$$B_i = \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 dx = A_i \text{ para todo } i.$$

Solución 3.1 En esta ocasión, tanto los b_i como los β_i (con $i \neq 1, n$) son incógnitas. Se tienen entonces $n + 1$ incógnitas por parte de los b_i y $n - 2$ incógnitas por parte de los β_i . Es decir, $2n - 1$ incógnitas en total. Acerca de las ecuaciones, se tienen $n - 1$ ecuaciones de la forma

$$\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 dx = A_i$$

Que, calculando la integral, quedan de la forma

$$\frac{b_n(\beta_{i+1}^{n+1} - \beta_i^{n+1})}{n+1} + \frac{b_{n-1}(\beta_{i+1}^n - \beta_i^n)}{n} + \dots + b_0(\beta_{i+1} - \beta_i) - A_i = 0 \quad (7)$$

Por otro lado, se tienen n ecuaciones de la forma

$$b_n(\beta_i)^n + b_{n-1}(\beta_i)^{n-1} + \dots + b_0 = 0 \quad (8)$$

Por lo que, en total (sumando las ecuaciones del tipo (7) y las del tipo (8)), se tienen $2n-1$ ecuaciones. Es decir, un sistema de ecuaciones de $(2n - 1) \times (2n - 1)$.

A continuación, se mostrarán resultados relativos a la existencia y unicidad de la solución de este sistema.

Teorema 3.1 (De existencia) Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ una función polinómica con n soluciones reales distintas $c = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = d$. Entonces existe otra función polinómica $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$ con n soluciones reales distintas $c - k = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n = d + k$ para $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx = \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} g(x) dx$$

Para todo $i = 1, \dots, n$.

Demostración. Al considerar el ideal I conformado por los polinomios en los miembros izquierdos de (7) y (8), defínase el orden entre monomios

Y

$$\beta_i > b_i \text{ Para todo } i$$

$$\beta_i > \beta_j \text{ Si } i < j$$

Ahora, sea G una base de Gröbner para I . Se tiene entonces que para todo $i = 1, \dots, 2n - 1$ existe $g_i \in G$ tal que $LT(g_i) = \beta_i^{n_i}$ para algún $n_i \geq 1$. Ya que, de no ser así, los $LT(g_i)$ no podrían generar a $LT(I)$ porque de acuerdo al orden entre monomios definido, todos los elementos de $LT(I)$ contienen un factor de la forma $\beta_i^{n_i}$.

Esto implica que el conjunto de ceros de los polinomios de I (esto es, el conjunto de soluciones de (7) y (8)) en la cerradura algebraica de \mathbb{R} , existen y son finitos. ■

Teorema 3.2 (De unicidad) Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ una función polinómica con n soluciones reales distintas $c = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = d$. Entonces existe una única función polinómica $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$

con n soluciones reales distintas $c - k = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n = d + k$ para $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx = \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} g(x)dx$$

Para todo $i = 1, \dots, n$.

Demostración. En teorema 3.1 se probó la existencia de $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$ cumpliendo las condiciones expuestas. Supongamos que existe otra función $h(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$ con n soluciones reales distintas $c - k = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < \beta_n = d + k$ para $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} g(x)dx = \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} h(x)dx$$

Para todo $i = 1, \dots, n$.

Si se toma un i cualquiera, se tiene que la expresión $\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} g(x)dx - \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} h(x)dx = 0$ da como resultado:

$$\frac{(b_n - c_n)x^{n+1}}{n+1} + \frac{(b_{n-1} - c_{n-1})x^n}{n} + \dots + (b_0 - c_0)x \Big|_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} = 0$$

Pero debido a que $\beta_i \neq \beta_{i+1}$, esto implica que $b_i - c_i = 0$ para todo $i = 0, \dots, n$. Es decir, $h(x) = g(x)$.

■

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió una forma de determinar los coeficientes de una función polinómica que generara la misma área de una función dada bajo ciertas condiciones. Entre las cuales, se definió la elongación de la base como una ampliación en un número real k del intervalo de integración. Hablando geoméricamente, esto podría verse como un estiramiento de la figura que conserva el área. Sin embargo, este estiramiento se hace desde la mitad de la función, porque el intervalo de integración se amplió en una unidad igual a ambos lados. Esto hace que, por ejemplo en el caso de la función cuadrática, la función que hace parte de la figura resultante después del estiramiento conserve la coordenada en x del vértice en el mismo número. Sin embargo, esto plantea muchas otras preguntas. Una de ellas es por ejemplo, ¿qué relación guardan los coeficientes de ambas funciones?, ¿cómo cambiarían los resultados anteriores si la ampliación del intervalo no fuera simétrica? Otra de las preguntas que genera

el trabajo en el caso de la función cuadrática (o una función polinómica específica) es encontrar la forma de la función máxima que conserve el área bajo la curva de una función dada. Esto es, los coeficientes de la función de mayor longitud de arco que conserva un área bajo la curva dada.

Otro caso que no hizo parte del trabajo es cuando la función polinómica tiene raíces imaginarias. ¿Es pertinente extrapolar los resultados?

Una importante aplicación es estudiar lo que sucedería ya no con áreas de figuras, sino con volúmenes. Sería interesante explorar si es posible encontrar un procedimiento que permita hallar los coeficientes de una función polinómica de mayor longitud que conserve el volumen generado por una función polinómica dada del mismo grado y así, posteriormente, estudiar la pertinencia de generalizar estos resultados en figuras homeomorfas específicas o variedades diferenciales.

BIBLIOGRAFIA

Apostol, T. (1965) Calculus. Vol. 1. Reverté.

Abate, M., & Tovena, F. (2012). *Curves and surfaces*. Springer Science & Business Media.

Dummit, DS, y Foote, RM. (2004) Algebra abstracta (Vol. 3). Hoboken: Wiley.

Fraleigh, J. (2002) A First Course in Abstract Algebra. Addison-Wesley, séptima edición.

Hartshorne, R. (2013). Geometría algebraica (vol. 52). Springer Science & Business Media.

Pressley, A. N. (2010). *Elementary differential geometry*. Springer Science & Business Media.

Surhone, L. Tennoe, M. Henssonow, S. (2010) Equiareal Map. Betascript publishing.

Spivak, M. D. (1970). A comprehensive introduction to differential geometry. Publish or perish.

Spivak, M. (1965). Calculus on Manifolds, vol. 1.